OLIMPIADA DE MATEMATICA
FAZA LOCALA
18.02.2012
Clasa a XI-a

Subiectul I

Se consideră determinantul $f(x)=\begin{vmatrix} e^{2x^2} & e^{-a} & e^{-x} \\ e^{-a} & e^{2x} & e^{-x^2} \\ e^{-x} & e^{-x^2} & e^{2a} \end{vmatrix}, a\in\mathbf{R}$.

a) Pentru ce valori ale lui $a\in\mathbf{R}$, ecuația $f(x)=0$ are soluții reale?

b) Să se determine $a\in\mathbf{R}$ pentru care ecuația $f(x)=0$ are soluții strict negative.

Subiectul II

Fie $A\in M_2(\mathbf{Q})$ cu proprietatea $\det\left(A^2-2012\cdot I_2\right)=0$. Arătați că matricea A este inversabilă şi $A^{-1}=qA$, unde $q\in\mathbf{Q}$.

Subiectul III

Fie $a>0$ şi considerăm şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin $x_0>0$ şi $x_{n+1}=\frac{x_n^3+a\cdot x_n}{1+a}, n\geq 0$. Studiați convergența şirului. În caz de convergență, calculați limita şirului.

(G.M. nr.11/2011)

Subiectul IV

Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ şirul cu termenul general $x_n=\sqrt{n+\sqrt{n-1+\sqrt{n-2+...+\sqrt{1}}}}$, $n\in\mathbf{N}^*$. Să se arate că:

a) $\sqrt{n}\leq x_n\leq\sqrt{2n}$, oricare ar fi $n\in\mathbf{N}^*$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{\sqrt{n}}=1$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=0$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n-\sqrt{n}\right)=\frac{1}{2}$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se evaluează cu 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.

Probleme propuse şi selectate de prof. Carmen Pop, prof. Teodor Pescăruş